Sur une somme d'exponentielles concernant la fonction de Möbius

Mémoire de *Master 2* de Mathématiques fondamentales [1]

Joseph Basquin

Juillet 2007

(1). Version corrigée au 2 décembre 2017.

Table des matières

Notations **4**

Introduction **5**

1 Caractères de Dirichlet et fonctions L **7**

1.1 Introduction 7

1.2 Caractères de groupes abéliens finis 8

1.3 Caractères multiplicatifs 9

1.4 Fonctions L de Dirichlet 11

1.5 Zéros et ordre de grandeur des fonctions L 11

2 Approximation diophantienne **18**

3 Théorème principal **21**

3.1 Construction d'un contour d'intégration 22

3.2 Traitement de la somme $S(y, \chi, \eta)$ 25

3.3 Estimation de la somme grâce aux fonctions de densité 29

3.4 Démonstration du théorème principal 30

4 Une autre démonstration **32**

4.1 La méthode de Vaughan 32

4.2 Application à la somme d'exponentielles 34

Bibliographie **38**

Remerciements

Mes remerciements vont à Gérald Tenenbaum qui, bien avant ce mémoire, m'a guidé dans le vaste domaine de la théorie analytique des nombres.
Je tiens à le remercier ensuite pour m'avoir permis d'effectuer mon mémoire de *Master 2* sous sa direction, et pour son aide durant la rédaction de celui-ci.

Notations

La lettre p, en tant qu'entier, désigne toujours un nombre premier. Étant donné un ensemble $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}|$ désigne son cardinal, et $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ sa fonction caractéristique.

Étant données des fonctions f, g, nous utilisons les notations usuelles $f \sim g$, $f = o(g)$, et indifféremment la notation de Landau $f = \mathcal{O}(g)$ et celle de Vinogradov $f \ll g$.
Les nombres complexes seront usuellement notés $s = \sigma + it$.
La partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre réel x sont notées $[x]$ et $\{x\}$; de plus, $\|x\|$ désigne la distance du réel x au plus proche entier.
On note également $e(\theta) = \exp(2i\pi\theta)$.

Les fonctions arithmétiques usuelles seront désignées par leur appellation standard, ainsi μ pour la fonction de Möbius, λ pour la fonction de Liouville, d pour la fonction *nombre de diviseurs*.

Introduction

Nous proposons d'étudier une somme d'exponentielles concernant la fonction μ de Möbius, afin d'en trouver une borne supérieure.

Nous considérons la somme

$$S(x,\theta) = \sum_{n \le x} \mu(n) e(n\theta).$$

Elle a été étudiée notamment par Davenport (voir [Dav37]) qui a montré que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$|S(x,\theta)| \le \frac{C_\lambda x}{(\log x)^\lambda},$$

et ceci uniformément en θ.

Des résultats conditionnels (relatifs à la non-annulation des fonctions $L(s,\chi)$ dans un demi-plan $\sigma > a$) ont été démontrés par Baker et Harman (voir [BH91]).

On se propose ici, en suivant Maier et Sankaranarayanan dans [MS05], de démontrer *inconditionnellement* le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit θ un nombre irrationnel de type* 1 (1). *Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$S(x,\theta) \ll x^{4/5+\varepsilon}.$$

Remarque. Par la formule de Parseval, nous avons

$$\int_0^1 |S(x,\theta)|^2 d\theta = \sum_{n \le x} \mu(n)^2 = \frac{6}{\pi^2} x + \mathcal{O}(x^{1/2}),$$

donc il est même raisonnable d'espérer que pour tout $\varepsilon > 0$, $S(x,\theta) = \mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon})$ pour presque tout θ. En effet,

$$\{\theta \in [0,1] : |S(x,\theta)| > x^{1/2+\delta}\}$$

(1). Voir définition 1 p. 19.

est mesurable et la formule de Parseval montre que la mesure de cet ensemble est $\ll x^{-2\delta}$.

Remarquons également qu'en posant

$$M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(x),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

et par sommation par parties,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} \frac{M(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Donc un résultat du type

$$M(x) = \mathcal{O}(x^{\alpha}),$$

pour $1/2 < \alpha < 1$ implique la convergence de l'intégrale et donc de $\zeta(s)^{-1}$ pour $\Re e\, s > \alpha$, et ainsi le fait que ζ n'a pas de zéros pour $\Re e\, s > \alpha$, ce qui est connu comme étant une *quasi-hypothèse de Riemann*.

De même un résultat du type

$$S(x, a/q) = \mathcal{O}(x^{\alpha}),$$

pour $1/2 < \alpha < 1$ implique que $L(s,\chi)$, où χ est n'importe quel caractère primitif modulo q, n'a pas de zéros pour $\Re e\, s > \alpha$. En effet, nous avons

$$\frac{1}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{S(x,\chi)}{x^{s+1}}dx,$$

où [(2)]

$$S(x,\chi) = \sum_{n\leq x} \mu(n)\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{a \mod q} \overline{\chi}(a) S(x, a/q),$$

d'où l'implication annoncée.

Le théorème 1 a également été démontré par une tout autre méthode que celle de [MS05] dans [MS02] ; nous donnerons cette démonstration au chapitre 4.

Nous allons d'abord nous intéresser aux caractères de Dirichlet, ainsi qu'aux fonctions L, puis nous verrons des résultats d'approximation diophantienne, afin de démontrer le théorème 1.

(2). Se reporter au §1.3 pour plus de détails sur de telles décompositions.

Chapitre 1

Caractères de Dirichlet et fonctions L

1.1 Introduction

Rappelons que pour G un groupe abélien fini, un *caractère* de G est un homomorphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes.
On note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G, qu'on munit de la structure naturelle de groupe multiplicatif (pour χ_1 et χ_2 deux caractères de G, $\chi_1\chi_2$ est l'homomorphisme $g \mapsto \chi_1(g)\chi_2(g)$).
L'élément neutre de $\hat{G}$ (l'identité sur G), appelé caractère *principal* de G, sera noté χ_0 ou $\mathbf{1}$.

Lemme 1 *Le groupe des caractères additifs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On considère pour $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$f_a : \begin{array}{lcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e(ax/n) \end{array}$$

C'est un caractère de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, et tout caractère de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est de ce type. En effet soit χ un tel caractère. On a : $\chi(1)^n = 1$ donc $\chi(1) = \omega$ est une racine n-ième de l'unité, et χ est alors tout simplement l'application $x \mapsto \omega^x$.

L'application

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$$

est donc clairement un isomorphisme.

1.2 Caractères de groupes abéliens finis

La propriété suivante est fondamentale.

Proposition 1 *Soit G un groupe abélien fini. Alors le groupe des caractères de G est isomorphe à G.*

Démonstration. Pour G_1 et G_2 abéliens, on remarque que

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}_1 \times \hat{G}_2 & \longrightarrow & \widehat{G_1 \times G_2} \\ (\chi_1, \chi_2) & \longmapsto & \chi_1 \times \chi_2 : \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \chi_1(g_1)\chi_2(g_2) \end{array} \end{array}$$

est une bijection.

L'injectivité est triviale :

$$\chi_1\chi_2 = \mathbf{1} \Rightarrow (\chi_1\chi_2)(g_1, 0) = 1 = \chi_1(g_1),$$

et cela pour tout $g_1 \in G_1$, donc $\chi_1 = \mathbf{1}$. De même $\chi_2 = \mathbf{1}$.

Pour la surjectivité, on voit que si χ est un caractère de $\widehat{G_1 \times G_2}$, $\chi_1 : g_1 \mapsto \chi(g_1, 0)$ est un caractère de G_1, de même on définit g_2 ; on a bien $\chi_1(g_1)\chi_2(g_2) = \chi(g_1, g_2)$.

Pour montrer comme annoncé que $\hat{G} \cong G$, on écrit G comme produit de groupes abéliens cycliques :

$$G \cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$

En appliquant le lemme ci-dessus par récurrence, on obtient

$$\hat{G} \cong \prod_{i=1}^{r} \widehat{(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, +)} \cong \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, +) \cong G$$

On a les relations suivantes, dites d'orthogonalité.

Lemme 2

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & si\ \chi = \chi_0 \\ 0 & si\ \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G| & si\ g = 0 \\ 0 & si\ g \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2}(g) = \begin{cases} |G| & si\ \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & si\ \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}$$

$$\sum_{\chi\in \hat{G}} \chi(g_1)\overline{\chi}(g_2) = \begin{cases} |G| & si\ g_1 = g_2 \\ 0 & si\ g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

Démonstration. Si $\chi \neq \chi_0$, il existe h tel que $\chi(h) \neq 1$ et donc l'égalité

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \sum_{g\in G} \chi(hg) = \chi(h) \sum_{g\in G} \chi(g)$$

implique $\sum_{g\in G} \chi(g) = 0$. On laisse les autres vérifications au lecteur ; notons que l'on utilise pour la deuxième relation le fait que pour tout $g \in G$, il existe $\psi \in \hat{G}$ tel que $\psi(g) \neq 1$.

Lemme 3 (Décomposition de Fourier) *Soit* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction. On a*

$$f(x) = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)$$

où

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{y\in G} f(y)\overline{\chi}(y).$$

Exemple. Pour $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, cette décomposition est tout simplement :

$$f(x) = \sum_{a \mod n} \hat{f}(a)e(xa/n),$$

où $\hat{f}(a) = (1/n)\sum_{y\in G} f(y)e(-y/n)$.

1.3 Caractères multiplicatifs

On applique le cas précédent à $G = ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*, \times)$.
Si χ est un caractère de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, on l'étend à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ en posant $\chi(x) = 0$ si $(x, q) \neq 1$. On étend ensuite χ à $\mathbb{Z}$, en composant avec la projection canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$; on remarquera que l'on obtient ainsi une fonction arithmétique complètement multiplicative. Ce sont ces fonctions sur $\mathbb{Z}$ que l'on appelle *caractères de Dirichlet* (q est alors appelé le conducteur).

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo q, et r est un entier, on peut définir un autre caractère de Dirichlet modulo qr en composant χ avec la projection canonique $\mathbb{Z}/qr\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Un caractère de Dirichlet est dit *primitif* lorsqu'on ne peut pas l'obtenir ainsi via un caractère de conducteur plus petit.

Remarque. En utilisant le lemme 2, on peut décomposer en caractères multiplicatifs de $((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*, \times)$, la fonction caractéristique des entiers congrus à a modulo q, si $(a, q) = 1$, par

$$\mathbf{1}_{a,q}(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \mod q} \overline{\chi}(a)\chi(n). \tag{1.1}$$

L'estimation classique suivante sur les sommes de Gauss sera nécessaire, on pourra se référer à [Dav80].

Théorème 2 *Soit χ un caractère modulo q non principal. Alors*

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{q} \chi(m)e(m/q) \ll q^{1/2}.$$

Démonstration. Si $(n, q) = 1$, on a

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m)\chi(n)e(m/q) = \sum_{h=1}^{q} \overline{\chi}(h)e(nh/q)$$

(avec $m = nh \mod q$).

On a

$$|\chi(n)|^2|\tau(\chi)|^2 = \sum_{h_1=1}^{q} \sum_{h_2=1}^{q} \overline{\chi}(h_1)\chi(h_2)e(n(h_1 - h_2)/q)$$

En sommant pour $n = 1, ..., q$, on obtient

$$\phi(q)|\tau(\chi)|^2 = q\sum_{h} |\chi(h)|^2 = q\phi(q),$$

car les termes de la somme ci-dessus sont non nuls uniquement pour $h_1 = h_2$ modulo q ; d'où le résultat.

Remarque. L'égalité utilisée ci-dessus

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{h=1}^{q} \overline{\chi}(h)e(nh/q)$$

est en fait valable pour tout n lorsque χ est un caractère primitif modulo q ; si χ n'est pas supposé primitif, on doit supposer que $(n, q) = 1$ pour avoir l'égalité (voir [Dav80], §9).

1.4 Fonctions L de Dirichlet

Les fonctions

$$L(s,\chi)=\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

sont convergentes pour $\sigma > 0$ par le critère d'Abel. Elles se prolongent, tout comme la fonction ζ, au plan complexe tout entier en une fonction méromorphe. Elles ne s'annulent pas pour $\Re e\, s > 1$, car elles ont un développement en produit eulérien.

On pourra consulter les ouvrages de Davenport [Dav80] et Montgomery [Mon71] pour les résultats classiques sur les fonctions L de Dirichlet.

Nous allons utiliser par la suite des résultats sur la répartition des zéros des fonctions L, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

1.5 Zéros et ordre de grandeur des fonctions L

Nous notons

$$N(\sigma,T,\chi)=\left|\{s=\beta+i\gamma, L(s,\chi)=0, \beta\geq\sigma, |\gamma|\leq T\}\right|.$$

Lemme 4 *Soit q un entier positif, $d \mid q$, χ un caractère modulo q/d et χ_d le caractère principal modulo d. Alors pour $\sigma \geq 1/2$, on a*

$$N(\sigma,T,\chi\chi_d)=N(\sigma,T,\chi).$$

Démonstration. On a pour $\sigma > 1$,

$$L(s,\chi)=\prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

et

$$L(s,\chi\chi_d)=\prod_p(1-\chi(p)\chi_d(p)p^{-s})^{-1}.$$

Comme $\chi_d(p)=0$ si $p\mid d$, et $=1$ si $p\nmid d$, on a

$$\begin{aligned}L(s,\chi\chi_d)&=\prod_{p\nmid d}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}\prod_{p\mid d}(1-\chi(p)\chi_d(p)p^{-s})^{-1}\\&=L(s,\chi)\prod_{p\mid d}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}.\end{aligned}$$

Or le dernier produit est non nul pour $\sigma > 0$ d'où le résultat.

Nous citons ici en tant que lemme un cas particulier du théorème 1 de [RS91].

Lemme 5 *Soit* $1/2 \leq \alpha \leq 1-\delta$, $H = C \log\log(qT)$ *et* χ *un caractère de Dirichlet modulo* q. *Supposons que* $L(s,\chi) \neq 0$ *dans le domaine*

$$\{\sigma > \alpha, T - H \leq t \leq T + H\}.$$

Alors on a la majoration

$$|\log L(\sigma + it, \chi)| \leq C_1 \log(qT)(\log\log(qT))^{-1}$$

dans le domaine

$$\{s = \sigma + it, \alpha < \sigma \leq 1 - C_2(\log\log(qT))^{-1}, T - H/2 \leq t \leq T + H/2\}.$$

Nous aurons également besoin des résultats de Montgomery (et Huxley) sur les zéros des fonctions L.

Théorème 3 *Soit* $q \geq 1$ *et* $T \geq 2$. *Alors pour* $1/2 \leq \sigma \leq 3/4 + \varepsilon$, *on a*

$$\sum_{\chi \mod q} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log(qT))^9 \ll (qT)^{\frac{12}{5}(1-\sigma)}(\log(qT))^9,$$

et pour $3/4 + \varepsilon \leq \sigma \leq 1$, *on a*

$$\sum_{\chi \mod q} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{\frac{12}{5}(1-\sigma)}(\log(qT))^A.$$

Ce théorème est en fait un raffinement (dû notamment à Huxley) du résultat suivant qu'on pourra trouver dans [Mon71] (théorème 12.1 p. 98).

Théorème 4 *Soit* $q \geq 1$ *et* $T \geq 2$. *Alors pour* $1/2 \leq \sigma \leq 4/5$, *on a*

$$\sum_{\chi \mod q} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log(qT))^9,$$

et pour $4/5 \leq \sigma \leq 1$, *on a*

$$\sum_{\chi \mod q} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}}(\log(qT))^{14}.$$

L'étude de résultats de ce type (appelés *théorèmes de densité* dans la littérature) fait l'objet de plusieurs chapitres dans [Mon71], nous ne donnerons ici qu'une idée des outils mis en œuvre pour démontrer le théorème 4.

Démonstration.

Nous utiliserons des paramètres $2 \leq X \leq Y \leq (qT)^A$ (A étant une constante absolue), qui seront fixés ultérieurement. En posant

$$M_X(s,\chi) = \sum_{n \leq X} \mu(n)\chi(n)n^{-s},$$

on a par produit de séries de Dirichlet

$$L(s,\chi)M_X(s,\chi) = \sum_{n \leq X} a_n \chi(n)n^{-s},$$

où

$$a_n = a_n(X) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq X}} \mu(d).$$

Ainsi $a_1 = 1$, $a_n = 0$ pour $2 \leq n \leq X$, et $|a_n| \leq d(n)$ pour $n > X$. En effectuant une transformée de Mellin, nous avons

$$\begin{aligned} e^{-1/Y} + \sum_{n > X} a_n \chi(n) n^{-s} e^{-n/Y} &= \sum_{n \geq 1} a_n \chi(n) n^{-s} e^{-n/Y} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s+w,\chi)M_X(s,\chi)Y^w \Gamma(w) dw. \quad (1.2) \end{aligned}$$

En supposant que $1/2 < \sigma < 1$, on déplace la droite d'intégration en $\Re e\, w = 1/2 - \sigma$ en passant le pôle simple en $w = 0$ et $w = 1 - s$ si χ est un caractère principal.

Ainsi (1.2) devient

$$\begin{aligned} &e^{-1/Y} + \sum_{n > X} a_n \chi(n) n^{-s} e^{-n/Y} = L(s,\chi)M_X(s,\chi) \\ &+ \varepsilon(\chi) \frac{\phi(q)}{q} M_X(1,\chi) Y^{1-s} \Gamma(1-s) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(1/2+it+iu,\chi) M_X(1/2+it+iu,\chi) Y^{1/2-\sigma+iu} \Gamma(1/2-\sigma+iu) du, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $\varepsilon(\chi) = 1$ si χ est principal et $\varepsilon(\chi) = 0$ sinon.

Considèrons l'équation (1.3) dans le cas où $s = \rho = \beta + i\gamma$ est un zéro avec $\beta \geq \sigma$. Traitons d'abord le terme en "$\varepsilon(\chi)$". Ce terme apparaît uniquement quand

$$L(s,\chi) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s})$$

(cf. la démonstration du lemme 4).

Mais si

$$|M_X(1,\chi_0)Y^{1-\rho}\Gamma(1-\rho)| \geq 1/6,$$

alors comme $M_X(1,\chi_0) \ll \log X \ll \log qT$, $Y^{1-\rho} \ll (qT)^A$, et $\Gamma(1-\rho) \ll \exp(-\pi|\gamma|/2)$ (par la formule de Stirling complexe [(1)]), on a

$$|\gamma| \ll \log qT,$$

donc ce terme n'est supérieur à $1/6$ que pour au plus $N(\sigma, A_1 \log qT) \ll (\log qT)^2$ zéros.

Dans l'intégrale (1.3), nous pouvons restreindre l'intervalle d'intégration à l'intervalle $[-Z, Z]$ où $Z = A_2 \log qT$ avec une erreur d'au plus $1/6$ pourvu que A_2 soit suffisamment grand. Nous supposons aussi que $Y \geq 6$ donc $e^{-1/Y} > 5/6$. Nous restreignons également la somme à $X < n \leq Y^2$, avec une erreur inférieure à $1/6$ pourvu que Y soit suffisamment grand.

Ainsi nous déduisons de (1.3)

$$\left|\sum_{X<n\leq Y^2} a_n \chi(n) n^{-\rho} e^{-n/Y}\right| \geq \frac{1}{6} \tag{1.4}$$

ou

$$\left|\int_{-Z}^{Z} L(1/2+i\gamma+iu,\chi) M_X(1/2+i\gamma+iu,\chi) Y^{1/2-\beta+iu}\Gamma(1/2-\beta+iu)du\right| \geq \frac{1}{6} \tag{1.5}$$

ou les deux.

Parmi les zéros ρ avec $\beta \geq \sigma$ et $|\gamma| \leq T$, nous en considérons un sous-ensemble $\mathcal{R}$ en contenant R tel que si ρ_1 et ρ_2 sont des zéros de la même fonction L, alors $|\gamma_1 - \gamma_2| \geq 3Z$.

D'autre part, si χ est un caractère modulo q et $0 \leq t \leq T$ alors

$$N(1/2, t+1, \chi) - N(1/2, t, \chi) \ll \log qT$$

(voir [Dav80], §16). Nous pouvons donc choisir nos R zéros pour que

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi) \ll (R+1)(\log qT)^2. \tag{1.6}$$

Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux sous-ensembles de $\mathcal{R}$ contenant R_1 et R_2 éléments et tels que (1.4) et (1.5) aient lieu respectivement. Alors $R \leq R_1 + R_2$.

(1). Rappelons la formule de Stirling complexe : on a l'estimation

$$\log\Gamma(s) = (s-1/2)\log s - s + (1/2)\log(2\pi) + \mathcal{O}(|s|^{-1}),$$

pour $|s| \to \infty$, $-\pi+\delta < \arg s < \pi - \delta$ pour tout $\delta > 0$.

Si besoin est, on remplace χ par le caractère primitif dont il est induit ; en effet si χ est induit par χ^*, alors $L(s,\chi)$ et $L(s,\chi^*)$ ont précisément les mêmes zéros dans le demi-plan $\sigma > 0$ (voir le lemme 4).

Nous traitons $\mathcal{R}_1$ en divisant la somme (1.4) en $< 3\log Y$ sommes portant sur des intervalles de la forme $[2^k, 2^{k+1}]$. Ainsi il existe $X \le U \le Y^2$ tel que

$$\left|\sum_{U}^{2U} a_n \chi(n) n^{-\rho} e^{-n/Y}\right| \ge (18\log Y)^{-1} \tag{1.7}$$

pour $\gg R_1(\log Y)^{-1}$ zéros de $\mathcal{R}_1$.

Le théorème suivant (théorème 7.6 p. 61 de [Dav80]) permet d'évaluer R_1.

Théorème 5 *Soit*

$$T(s,\chi) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi(n) n^{-s},$$

$\mathcal{A}_\chi$ *un ensemble fini de nombres complexes* $s = \sigma + it$. *Soit* T_0, T, σ_0, δ *des réels tels que pour tout* χ *et* $s, s' \in \mathcal{A}_\chi$, $s \ne s'$,

$$\begin{aligned}
&T_0 + \delta/2 \le t \le T_0 + T - \delta/2,\\
&\sigma \ge \sigma_0,\\
&|t - t'| \ge \delta.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{\chi} \sum_{s\in\mathcal{A}_\chi} |T(s,\chi)|^2 \le (qT+N)(\delta^{-1} + \log N) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 n^{-2\sigma_0} \left(1 + \log \frac{\log 2N}{\log 2n}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
R_1(\log Y)^{-3} &\ll \sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{R}_1\\ L(\rho,\chi)=0}} \left|\sum_{U}^{2U} a_n \chi(n) n^{-\rho} e^{-n/Y}\right|^2\\
&\ll (\log qT)^4 (qTU^{1-2\sigma} + U^{2-2\sigma}) e^{-2U/Y}\\
&\qquad\ll (\log qT)^4 (qTX^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma}),
\end{aligned}$$

donc

$$R_1 \ll (qTX^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma})(\log qT)^7. \tag{1.8}$$

Nous utilisons ceci pour traiter le cas $1/2 \le \sigma \le 4/5$. Pour le cas $4/5 \le \sigma \le 1$, nous utilisons le théorème suivant (voir théorème 8.3 p. 65 de [Dav80]).

Théorème 6 *Soit $T(s,\chi)$ comme dans le théorème précédent. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de triplets (s,d,χ) où χ est un caractère primitif modulo d et $d \mid q$. Soit σ_0, $T \geq 2$ et δ tels que $\sigma \geq \sigma_0$, $|t| \leq T$ et $|t-t'| \geq \delta$ pour tous triplets distincts de $\mathcal{A}$. Alors*

$$\sum_{(s,d,\chi)\in\mathcal{A}} |T(s,\chi)|^2 \ll (1+\delta^{-1})(N+|\mathcal{A}|(qT)^{1/2}\log qT)\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 n^{-2\sigma_0}. \quad (1.9)$$

Nous appliquons ce théorème avec $T(s,\chi)$ étant la somme de (1.7), et $\mathcal{A}$ l'ensemble des $\rho \in \mathcal{R}_1$ pour lesquels (1.7) a lieu.

Si

$$X^{2\sigma-1} \geq A_3(qT)^{1/2}(\log qT)^6, \quad (1.10)$$

où A_3 est suffisamment grand, alors le terme provenant de $|\mathcal{A}|$ dans (1.9) est inférieur à la moitié du membre de gauche, et peut donc être ignoré. D'où

$$R_1 \ll (\log qT)^5 U^{2-2\sigma}e^{-2U/Y} \ll Y^{2-2\sigma}(\log qT)^5. \quad (1.11)$$

Taitons à présent le cas de $\mathcal{R}_2$. Supposons que l'on ait (1.5) (avec éventuellement χ remplacé par le caractère primitif dont il provient). Pour tout $\rho \in \mathcal{R}_2$, soit t_ρ un réel satisfaisant $|\gamma - t_\rho| \leq Z$ et tel que $|L(1/2+it_\rho,\chi)M_X(1/2+it_\rho,\chi)|$ soit maximal. Comme $N(1/2,T,\chi) \ll T\log qT$, nous pouvons supposer que $\beta \geq \sigma \geq 1/2 + (\log qT)^{-1}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(1/2-\beta+iu)|du \ll \log qT.$$

Ainsi par (1.5), nous avons

$$|L(1/2+it_\rho,\chi)M_X(1/2+it_\rho,\chi)| \gg Y^{\sigma-1/2}(\log qT)^{-1}.$$

D'après la définition de $\mathcal{R}$ et de t_ρ, nous voyons que si ρ_1 et ρ_2 sont des zéros de la même fonction L, alors

$$|t_{\rho_1} - t_{\rho_2}| \geq Z.$$

Par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} R_2 Y^{(4/3)\sigma-2/3}(\log qT)^{-4/3} &\ll \sum_{\rho\in\mathcal{R}_2} |L(1/2+it_\rho,\chi)M_X(1/2+it_\rho,\chi)|^{4/3} \\ &\leq \Big(\sum_{\rho\in\mathcal{R}_2}|L(1/2+it_\rho,\chi)|^4\Big)^{1/3}\Big(\sum_{\rho\in\mathcal{R}_2}|M_X(1/2+it_\rho,\chi)|^2\Big)^{2/3}. \quad (1.12)\end{aligned}$$

Nous appliquons le théorème 5 au second facteur, et le théorème suivant (voir [Dav80] corollaire 10.4 p. 76) au premier.

Théorème 7 *Si χ est un caractère modulo q, χ^* désigne le caractère primitif dont il provient. Soit pour chaque caractère χ, $\mathcal{A}_\chi$ un ensemble fini de réels de l'intervalle $[-T,T], T \geq 2$, et δ tel que $|t-t'| \geq \delta$ pour tout χ et t,t' distincts dans $\mathcal{A}_\chi$. On a*

$$\sum_\chi \sum_{t\in\mathcal{A}_\chi} |L(1/2+it,\chi^*)|^4 \ll (\delta^{-1}+\log qT)qT(\log qT)^4.$$

Nous avons alors

$$R_2 \ll Y^{2/3-(4/3)\sigma} qT(\log qT)^5 \tag{1.13}$$

si $X \leq qT$.

Ceci permet de traiter le cas $1/2 \leq \sigma \leq 4/5$; pour l'autre cas, soit V un paramètre défini ultérieurement. Les $\rho \in \mathcal{R}_2$ pour lesquels $|L(1/2+it_\rho,\chi)| \geq V$ sont en nombre $\ll qTV^{-4}(\log qT)^5$ d'après le théorème 7. Pour les autres $\rho \in \mathcal{R}_2$, nous avons

$$|M_X(1/2+it_\rho,\chi)| \gg Y^{\sigma-1/2}V^{-1}(\log qT)^{-1}. \tag{1.14}$$

Nous utilisons à nouveau le théorème 6 avec $T(s,\chi) = M_X(s,\chi)$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des $1/2+it_\rho, \rho \in \mathcal{R}_2$ pour lesquels (1.14) a lieu. Le terme provenant de $|\mathcal{A}|$ est moindre que la moitié du membre de gauche si

$$Y^{2\sigma-1} \geq A_4 V^2 (qT)^{1/2}(\log qT)^4, \tag{1.15}$$

où A_4 est une constante suffisamment grande. Dans ce cas, ce terme peut être ignoré et le nombre de $\rho \in \mathcal{R}_2$ tels que l'on ait (1.14) est

$$\ll XV^2Y^{1-2\sigma}(\log qT)^3,$$

et donc dans ce cas

$$\mathcal{R}_2 \ll qTV^{-4}(\log qT)^5 + XY^{1-2\sigma}V^2(\log qT)^3. \tag{1.16}$$

Nous pouvons a présent terminer la démonstration du théorème 4.

- Dans le cas $1/2 \leq \sigma \leq 4/5$, nous utilisons l'équation (1.6) et $X = qT, Y = (qT)^{3/(2(2-\sigma))}$ dans (1.8), (1.13).
- Dans le cas $4/5 \leq \sigma \leq 1$, nous prenons X pour que l'égalité ait lieu dans (1.10), $V = (qT)^{(3\sigma-2)/(4\sigma)}$, et Y tel que l'égalité ait lieu dans (1.15). Ainsi (1.6), (1.11), (1.16) nous donnent le résultat.

Chapitre 2

Approximation diophantienne

Nous nous intéressons ici à la possibilité d'approcher un réel θ par un nombre rationnel, vaste sujet dont on trouvera de nombreuses références, en particulier [HW38], [KN74].

Commençons par une remarque évidente : si q est un entier, alors $q\theta$ est compris entre deux entiers, donc il existe un entier r tel que $\|q\,\theta\| = |q\theta - r| \leq 1/2$. Cela nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 2 *Pour tout réel θ, il existe un couple d'entiers (r,q) tels que*

$$\left|\theta - \frac{r}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}.$$

En utilisant le principe des tiroirs, on obtient le classique théorème suivant de Dirichlet.

Théorème 8 *Soit θ un réel et $n \geq 1$. Il existe un couple d'entiers premiers entre eux (r, q), avec $1 \leq q \leq n$ tels que*

$$\left|\theta - \frac{r}{q}\right| \leq \frac{1}{qn},$$

autrement dit

$$\|q\theta\| \leq 1/n.$$

Démonstration. Les $n+1$ éléments 0, $\{\theta\}$, $\{2\,\theta\}$, $\ldots$, $\{n\,\theta\}$ de $[0,1[$ se répartissent dans les n tiroirs $[0,\frac{1}{n}[$, $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}[$, $\ldots$, $[\frac{n-1}{n},1[$, donc il existe deux entiers $0 \leq k < \ell \leq n$ tels que $|\{k\,\theta\} - \{\ell\,\theta\}| < \frac{1}{n}$, ou encore $|q\,\theta - r| < \frac{1}{n}$ avec $q = \ell - k$ et r entier.

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 9 *Soit θ un irrationnel. Il existe une infinité de rationnels $\frac{r}{q}$ tels que*

$$\left|\theta - \frac{r}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

i.e.

$$q\|q\theta\| \leq 1.$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple d'entiers (r, q) avec $q \leq n$ et $|\theta - \frac{r}{q}| \leq \frac{1}{q\,n} \leq \frac{1}{q^2}$. Par ailleurs $|\theta - \frac{r}{q}| \leq \frac{1}{q\,n} \leq \frac{1}{n}$ d'où l'infinité de tels rationnels.

Définition 1 *On dit qu'un irrationnel θ est de type η si*

$$\eta = \sup\{\delta > 0 : \liminf_{q\to\infty} q^{\delta}\|q\theta\| = 0\}.$$

Remarque. La philosophie est : plus petit est le type de θ (i.e. moins bonne est l'approximation par les rationnels), plus uniforme est la distribution de $(n\theta)$ modulo 1 (voir [KN74] p. 122).

Notons qu'en 1955, Roth montre le théorème suivant, qui lui vaut la médaille Fields en 1958.

Théorème 10 *Pour tout nombre algébrique θ et $\varepsilon > 0$, l'équation*

$$\left|\theta - \frac{r}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions (r, q) premiers entre eux.

On en déduit, pour tout $\varepsilon > 0$ que

$$q^{1+\varepsilon}\|q\theta\| \gg 1$$

i.e. que les nombre irrationnels algébriques sont de type 1.

Nous aurons besoin ici du lemme suivant.

Lemme 6 *Soit θ de type 1 et $\varepsilon > 0$. Pour x suffisamment grand, il existe des entiers r, q avec $(r, q) = 1$ tels que*

$$\left|\theta - \frac{r}{q}\right| < \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$$

et

$$x^{1/(2(1+\varepsilon))} \leq q \leq x^{1/2}.$$

Démonstration. D'après la définition du type de θ, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, q_0 tel que $\|q\theta\| \geq q^{-(1+\varepsilon)}$ pour $q \geq q_0$. Choisissons x tel que $x^{-1/2} < \min_{q<q_0} \|q\theta\|$. Par le théorème d'approximation de Dirichlet, il existe r/q, avec $(r, q) = 1$ et $1 \leq q \leq x^{1/2}$ tel que $|\theta - r/q| < 1/(qx^{1/2})$ i.e. $\|q\theta\| < x^{-1/2}$. Nécessairement, par la remarque précédente, $q \geq q_0$. D'où

$$q^{-(1+\varepsilon)} \leq \|q\theta\| \leq x^{-1/2},$$

donc $q \geq x^{1/(2(1+\varepsilon))}$ et

$$\left|\theta - \frac{r}{q}\right| < \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}.$$

Le lemme suivant sera utile pour la deuxième démonstration du théorème 1 ; on peut se référer ici à [KN74], p. 123.

Lemme 7 *Soit θ de type η, alors*

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\|m\theta\|} = \mathcal{O}(n^{\eta+\varepsilon}),$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Pour $0 \leq p < q \leq n$, on a par définition du type,

$$\|q\theta \pm p\theta\| = \|(q \pm p)\theta\| \geq \frac{1}{c(q+p)^{\eta+\varepsilon}} \geq \frac{1}{2cn^{\eta+\varepsilon}},$$

avec $c = c(\varepsilon)$ une constante.

Comme $\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$, on a $|\|q\theta\| - \|p\theta\|| = \|q\theta+p\theta\|$ ou $\|q\theta-p\theta\|$.

D'où

$$|\|q\theta\| - \|p\theta\|| \geq \frac{1}{2cn^{\eta+\varepsilon}},$$

pour $0 \leq p < q \leq n$. Cela implique que dans chacun des intervalles

$$\left[0, \frac{1}{2cn^{\eta+\varepsilon}}\right[, \left[\frac{1}{2cn^{\eta+\varepsilon}}, \frac{2}{2cn^{\eta+\varepsilon}}\right[, \ldots, \left[\frac{n}{2cn^{\eta+\varepsilon}}, \frac{n+1}{2cn^{\eta+\varepsilon}}\right[,$$

il y a au plus un nombre de la forme $\|m\theta\|$, $1 \leq m \leq n$, et en particulier aucun dans le premier intervalle. D'où

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\|m\theta\|} \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{2cn^{\eta+\varepsilon}}{m} \ll n^{\eta+\varepsilon} \log n \ll n^{\eta+2\varepsilon}.$$

Des résultats de même nature sont à consulter dans [KN74], chapitre 2.3 ; voir également [Erd48].

Chapitre 3

Théorème principal

En vue de démontrer le résultat principal, en suivant [BH91], on va tout d'abord faire intervenir les caractères pour traiter la somme $S(x, \theta)$.

Lemme 8 *Soit $\beta = \theta - r/q$ et $q \leq x^2$. On a*

$$S(x,\theta) = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{\phi(q/d)} \sum_{\chi \mod q/d} \chi(r)\tau(\overline{\chi})S(x/d, \chi\chi_d, \beta d)$$

où nous avons posé

$$S(y,\chi,\eta) = \sum_{n \leq y} \mu(n)\chi(n)e(n\eta)$$

et

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{q/d} \chi(m)e(md/q).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
S(x,\theta) &= \sum_{n\le x} \mu(n)e(rn/q)e(\beta n) \\
&= \sum_{t=1}^{q} e(rt/q) \sum_{\substack{n\le x \\ n=t \mod q}} \mu(n)e(\beta n) \\
&= \sum_{d\mid q} \sum_{\substack{t=1 \\ (t,q)=d}}^{q} e(rt/q) \sum_{\substack{l\le x/d \\ l=t/d \mod q/d}} \mu(dl)e(\beta dl) \\
&= \sum_{d\mid q} \sum_{\substack{s=1 \\ (s,q/d)=1}}^{q/d} e(rsd/q) \sum_{\substack{l\le x/d \\ l=s \mod q/d}} \mu(dl)e(\beta dl) \\
&= \sum_{d\mid q} \sum_{\substack{s=1 \\ (s,q/d)=1}}^{q/d} e(rsd/q) \sum_{l\le x/d} \mu(dl)e(\beta dl)\frac{1}{\phi(q/d)} \sum_{\chi \mod q/d} \overline{\chi}(s)\chi(l)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

en utilisant la décomposition en caractères de l'indicatrice des entiers congrus à s modulo q/d, car $(s,q/d)=1$ (doù la nécessité de faire intervenir la somme pour $d \mid q$, de manière à avoir cette condition).

Enfin on a

$$S(x,\theta) = \sum_{d\mid q} \frac{\mu(d)}{\phi(q/d)} \sum_{\chi \mod q/d} \sum_{\substack{s=1 \\ (s,q/d)=1}}^{q/d} e(rsd/q)\overline{\chi}(s) \sum_{l\le x/d} \mu(l)\chi(l)\chi_d(l)e(\beta dl)$$

car $\mu(dl)=\mu(d)\mu(l)$ si $(d,l)=1$ et 0 sinon, d'où $\mu(dl)=\mu(d)\mu(l)\chi_d(l)$. D'où le lemme.

3.1 Construction d'un contour d'intégration

Nous allons définir un contour d'intégration dans le but de remplacer dans la section suivante le segment vertical $[2-iT, 2+iT]$. On le définit symétriquement par rapport à l'axe réel, nous détaillons ainsi uniquement la construction dans le demi-plan supérieur.

Soit α une constante positive vérifiant $1/2+\delta \le \alpha \le 1-\delta$, avec δ une constante positive arbitrairement petite. Nous supposons ici que $L(s,\chi)$ ne s'annule pas dans la région $\{\sigma > 1 - C(\log\log 2q(U+10))^{-1}, U \le t \le 2U\}$.

Soit $T = 2^L$ et $H_0 = c_0 \log\log(qT) = 2^{l_0}$ (où $1/2 \le c_0 \le 1$ est choisi de manière à ce que H_0 soit une puissance de 2).

Pour $l_0 \leq l \leq L-1$, on définit $U = U^{(l)} = 2^l$ et $H = H^{(l)} = c_l \log\log(qU^{(l)})$ (où $1/2 \leq c_l \leq 1$ est choisi de manière à ce que $U/2H$ soit un entier).

On partage alors l'intervalle $[U, 2U]$ en $U/2H$ intervalles $I_j = [U_j - H, U_j + H]$ ($1 \leq j \leq U/2H$).

Soit $\tilde{\beta}_j = \widetilde{\beta_j^{(l)}}$ la plus grande abcisse des zéros de $L(s,\chi)$ dans le rectangle

$$\left\{\sigma \geq \alpha, t \in \widetilde{I_j} = [U_j - 2H, U_j + 2H]\right\}$$

et $\beta_j = \tilde{\beta}_j + C(\log\log 2q(U+10))^{-1}$, ou $\beta_j = \alpha$ si $L(s,\chi)$ n'a pas de zéros dans le rectangle précité.

Nous définissons de même $\tilde{\beta}_0$ comme la plus grande abcisse des zéros de $L(s,\chi)$ dans le rectangle

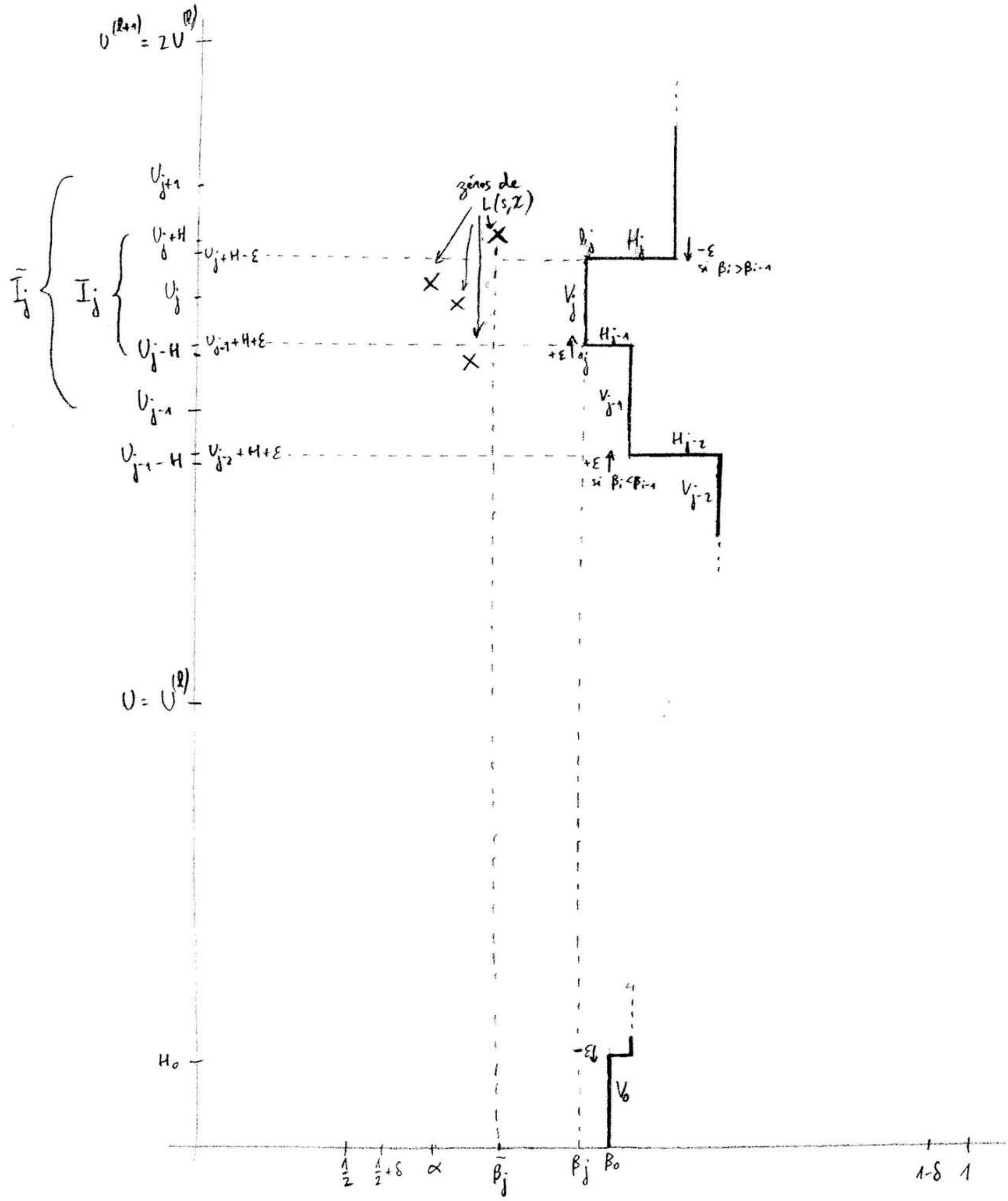
$$\left\{\sigma \geq \alpha, t \in [0, 2\widetilde{H_0}]\right\}$$

(où $\widetilde{H_0} = H_0 + 2(\log(qH_0))^2$) et $\beta_0 = \tilde{\beta}_0 + C(\log\log(qH_0))^{-1}$.

On va construire un contour formé d'une alternance de segments vericaux $V_j = [a_j, b_j]$ puis horizontaux $H_j = [b_j, a_{j+1}]$. *À epsilon près*, le segment V_j est $\beta_j + iI_j$ et le segment H_j relie les segments verticaux entre eux.

Plus précisément, soit $a_0 = \beta_0$. Nous construisons les segments successivement par le procédé suivant.
Supposons construit un point a_j. On construit le segment vertical suivant $[a_j, b_j]$ en posant $\Im m\, b_j = U_j + H + \varepsilon$ si $\beta_{j+1} < \beta_j$ et $\Im m\, b_j = U_j + H - \varepsilon$ dans le cas contraire. On construit ensuite le segment horizontal $[b_j, a_{j+1}]$ en prenant $\Re e\, a_{j+1} = \beta_{j+1}$.

Nous relions également le dernier (resp. premier) segment vertical correspondant à $U^{(l-1)} \leq t \leq 2U^{(l-1)}$ (resp. $U^{(l)} \leq t \leq 2U^{(l)}$) par un segment horizontal.


zéros de L(s,χ)
-ε
si βi > βi-1
+ε
si βi < βi-1

3.2 Traitement de la somme $S(y,\chi,\eta)$

Rappelons d'emblée un résultat d'analyse complexe qui sera utile ultérieurement.

Théorème 11 (Lemme de la partie réelle - Borel-Carathéodory) *Soit F une fonction holomorphe pour $|s| \leq R$, telle que $F(0) = 0$. On suppose que $\max_{|s|=R} \Re e\, F(s) = A$. Alors on a pour $0 \leq r \leq R$,*

$$\max_{|s|\leq r} |F(s)| \leq \frac{2Ar}{R-r}.$$

Démonstration. Soit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n$, avec $|s| \leq R$. Si l'on pose $\theta_n = \arg a_n$, pour tout n, on a

$$\Re e\, F(Re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \cos(n\theta + \theta_n),$$

la série étant absolument convergente pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Comme F est holomorphe, on a

$$\int_0^{2\pi} \Re e\, F(Re^{i\theta}) d\theta = \Re e \int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta}) d\theta = F(0) = 0.$$

Pour tout $n \geq 1$, il suit donc

$$\pi |a_n| R^n = \int_0^{2\pi} (1 + \cos(n\theta + \theta_n)) \Re e\, F(Re^{i\theta}) d\theta \leq 2\pi A.$$

D'où

$$|F(s)| \leq 2A \sum_{n=1}^{\infty} (r/R)^n = \frac{2Ar}{R-r},$$

si $|r| \leq R$.

Nous utilisons également le lemme suivant.

Lemme 9 *Soit $m \geq 1$ un entier et $T \geq 1$. Alors*

$$S(m,\chi,0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{1}{L(w,\chi)} \frac{m^w}{w} dw + \mathcal{O}(m^2/T).$$

Démonstration. Nous utilisons la formule de sommation classique (voir [Ten95], théorème 2 p. 135) avec $a_n = \mu(n)\chi(n)$ et $F(s) = L(s,\chi)^{-1}$, d'où

$$S(m,\chi,0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{1}{L(w,\chi)} \frac{m^w}{w} dw + \mathcal{O}(m^2/T).$$

On a par sommation d'Abel

$$S(y,\chi,\eta) = \sum_{m=1}^{y-1} S(m,\chi,0)e(n\eta)(1-e(\eta)) + S(y,\chi,0)e(\eta y).$$

Par le lemme 9, on a avec $T \leq y^3$,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{y-1} S(m,\chi,0)e(n\eta) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{1}{L(w,\chi)w}\left(\sum_{m=1}^{y-1} m^w e(\eta m)\right) dw + \mathcal{O}(\log y)\\ &= I + \mathcal{O}(\log y).\end{aligned}$$

Nous remplaçons dans l'intégrale I le segment $[2-iT, 2+iT]$ par le contour défini précédemment et estimons les contributions à l'intégrale de chaque segment.

D'après le lemme 5, on a

$$\big|\log|L(\sigma+it,\chi)|\big| \leq C\log(qU)(\log\log(qU))^{-1}$$

d'où

$$|L(\sigma+it,\chi)|^{-1} \ll (qU)^{\varepsilon} \tag{3.2}$$

pour $\sigma+it \in V_j$ et $\sigma+it \in H_j$ (avec $|t| \geq H_0$).

Nous traitons la partie $|t| \leq H_0$ de la manière suivante.

- Si $|t| \in [2^5, H_0]$, comme la région $\left\{10 \geq \sigma \geq \beta_0, 2^3 \leq |t| \leq \widetilde{H_0}\right\}$ est sans zéro pour $L(s,\chi)$, en appliquant le théorème de Borel-Carathéodory, on a

$$|\log L(\sigma+it,\chi)| \ll (\log(qH_0))^{1-\varepsilon} \ll (\log(qT))^{1-\varepsilon}.$$

  Ainsi l'estimation (3.2) est valable pour $\sigma+it \in V_0$, avec $|t| \in [2^5, H_0]$, pourvu que T soit suffisamment grand.
- Si $|t| \in [0, 2^5]$, comme la région $\left\{10 \geq \sigma \geq \beta_0, |t| \leq 2^7\right\}$ est sans zéro pour $L(s,\chi)$, en appliquant à nouveau le théorème de Borel-Carathéodory, on a

$$|L(\beta_0+it,\chi)|^{-1} \ll (qT)^{\varepsilon}.$$

On effectuant une sommation d'Abel, on a

$$\sum_{m=1}^{y-1} m^{\beta_j} m^{it} e(\eta m) \ll (y-1)^{\beta_j} \max_{u \leq y-1}\left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|.$$

D'où

$$I(V_j) = \frac{1}{2i\pi}\int_{V_j} \frac{1}{L(w,\chi)w}\left(\sum_{m=1}^{y-1} m^w e(\eta m)\right) dw$$
$$\ll HU^{-1}(qU)^{\varepsilon} y^{\beta_j} \max_{u\leq y} \sup_{t\in[U,2U]} \left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|.$$

De même,

$$I(V_0) \ll H_0(qT)^{\varepsilon} y^{\beta_0}\left(\max_{u\leq y} \sup_{t\in[0,2^5]} \left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|\right.$$
$$\left. + \max_{u\leq y} \sup_{t\in[2^5,H_0]} \left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)$$

et

$$I(H_j) = \frac{1}{2i\pi}\int_{H_j} \frac{1}{L(w,\chi)w}(\sum_{m=1}^{y-1} m^w e(\eta m))dw$$
$$\ll U^{-1}(qU)^{\varepsilon} y^{\beta_j} \max_{u\leq y} \sup_{t\in[U,2U]} \left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|.$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de zéro exceptionnel. Comme avant, α est une constante fixée vérifiant $1/2+\delta \leq \alpha \leq 1-\delta$, avec δ arbitrairement petit. Nous choisissons à présent une partition de l'intervalle $[\alpha, 1]$

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{j-1} < \alpha_j = 1$$

avec $\alpha_j - \alpha_{j-1} < \varepsilon$. Le nombre d'indices j pour lesquels $\beta_j \in [\alpha_{l-1}, \alpha_l]$, est borné par $N(\alpha_{l-1}, 2U, \chi)$. D'après le paragraphe précédent, la contribution totale des segments verticaux et horizontaux à l'intégrale I (pour $U \leq t \leq 2U$) est

$$\sum_j (I(V_j) + I(H_j))$$
$$\ll HU^{-1}(qU)^{\varepsilon}\left(\max_{u\leq y} \sup_{t\in[U,2U]} \left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)\left(\sum_j y^{\beta_j}\right)$$
$$\ll HU^{-1}(qU)^{\varepsilon}\left(\max_{u\leq y} \sup_{t\in[U,2U]} \left|\sum_{m\leq u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)$$
$$\times\left(Uy^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha}^{1} y^{\sigma+\varepsilon} N(\sigma, 2U, \chi) d\sigma\right) \quad (3.3)$$

car $\beta_j > \tilde{\beta}_j$.

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{y-1} S(m,\chi,0)e(\eta m)\\
&\ll \sum_{\substack{l_0\le j\le L\\ U=2^j}} \left(HU^{-1}(qU)^{\varepsilon} \left(\max_{u\le y} \sup_{t\in[U,2U]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)\right.\\
&\times \left.\left(Uy^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha}^{1} y^{\sigma+\varepsilon} N(\sigma,2U,\chi)d\sigma\right)\right)\\
&+ H_0(qT)^{\varepsilon}\left(\max_{u\le y} \sup_{t\in[0,2^5]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right| + \max_{u\le y} \sup_{t\in[2^5,H_0]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)\\
&\times \left(2^{l_0} y^{\alpha+\varepsilon} + 2^{l_0}\int_{\alpha}^{1} y^{\sigma+\varepsilon}\frac{N(\sigma,2^{l_0},\chi)}{2^{l_0}}d\sigma\right) + \log y\\
&\ll H(qT)^{4\varepsilon} \max_{u\le y}\left(\sup_{t\in[0,2]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right| + \sum_{2\le j\le L} \sup_{t\in[2^{j-1},2^j]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)\\
&\times \left(y^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha}^{1} y^{\sigma+\varepsilon}\frac{N(\sigma,T,\chi)}{T}d\sigma\right) + \log y\\
&\ll \max_{1\le T\le y^3} T^{-1}(qT)^{5\varepsilon} \max_{u\le y}\left(\sup_{t\in[0,2]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right|\right.\\
&+ \left.\sum_{2\le j\le L} \sup_{t\in[2^{j-1},2^j]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right|\right)\\
&\qquad\qquad \times \left(Ty^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha}^{1} y^{\sigma+\varepsilon} N(\sigma,T,\chi)d\sigma\right) + \log y.
\end{aligned}
$$

Nous évaluons $S(y,\chi,0)e(\eta y)$ de la même manière et obtenons

$$
S(y,\chi,0)e(\eta y) \ll \max_{1\le T\le y^3} T^{-1}(qT)^{5\varepsilon}\left(Ty^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha}^{1} y^{\sigma+\varepsilon} N(\sigma,T,\chi)d\sigma\right) + \log y.
$$

Enfin, nous utilisons une évaluation triviale de la somme suivante.

$$
\sup_{t\in[0,2^L]} \left| \sum_{m\le u} m^{it} e(\eta m)\right| \le u \le |\eta|^{-1}(1+|\eta|u).
$$

3.3 Estimation de la somme grâce aux fonctions de densité

Théorème 12 *Soit α un réel. Alors pour tout rationnel r/q avec $(r,q)=1$ et pour tout α vérifiant $1/2+\delta \leq \alpha \leq 1-\delta$ (δ arbitrairement petit), on a*

$$
\begin{aligned}
&S(x,\theta) \ll q^{-1/2}x^{1+10\varepsilon} + \sum_{d|q}(q/d)^{1/2}\frac{1}{\phi(q/d)}\left(1+x\left|\theta-\frac{r}{q}\right|\right)\\
&\left(\max_{1\leq T\leq (x/d)^3} T^{-1}(qT)^{\varepsilon}\int_{1/2}^{1}\Big(T\phi(q/d)(x/d)^{\alpha+\varepsilon}\right.\\
&\qquad\qquad\left. + (x/d)^{\sigma+\varepsilon}\sum_{\chi \mod q/d} N(\sigma,T,\chi\chi_d)\Big)d\sigma\right). \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Démonstration. En posant $\chi=\tilde{\chi}\chi_d$, où $\tilde{\chi}$ est un caractère modulo q/d, χ est un caractère modulo q. Nous fixons $\eta=\beta d$. En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on a

$$
\begin{aligned}
&S(y,\chi,\eta)\\
&\ll \max_{1\leq T\leq y^3}(1+|\eta|y)T^{-1}(qT)^{10\varepsilon}\left(Ty^{\alpha+\varepsilon}+\int_{\alpha}^{1}y^{\sigma+\varepsilon}N(\sigma,T,\chi)d\sigma\right)+\log y\\
&\qquad \ll \max_{1\leq T\leq y^3}(1+|\eta|y)T^{-1}(qT)^{10\varepsilon}\left(Ty^{\alpha+\varepsilon}+\int_{1/2}^{1}y^{\sigma+\varepsilon}N(\sigma,T,\chi)d\sigma\right)
\end{aligned}
\qquad (3.5)
$$

s'il n'y a pas de zéro exceptionnel. Ainsi l'ensemble des zéros non exceptionnels contribue à $\sum_{\tilde{\chi} \mod q/d} S(y,\chi,\eta)$ en une quantité

$$\ll \sum_{\tilde{\chi} \mod q/d} |S(y,\chi,\eta)|.$$

En appliquant le lemme 8 (avec $y=x/d$), cela conduit au second terme de la somme de (3.4).

Le cas où il existerait un zéro exceptionnel est traité comme suit. Les estimations

$$\sum_{\chi} N(\sigma,T,\chi) \ll (qT)^{(12/5)(1-\sigma)}(\log(qT))^{A}$$

avec une constante absolue A, nous montrent que le cardinal de l'ensemble des zéros exceptionnels est

$$\ll \sum_{\chi} N\left(1-\frac{C^*}{\log\log(qT)},T,\chi\right) \ll \exp\left(C_1^*\left(\frac{\log(qT)}{\log\log(qT)}\right)\right) \ll (qT)^{\varepsilon}.$$

Pour chacun de ces zéros exceptionnels, l'estimation triviale de $S(y,\chi,\eta)$ et le lemme 8 (avec $y = x/d$) nous permettent d'établir que la contribution à $S(x,\theta)$ due aux zéros exceptionnels est

$$\ll q^{-1/2+\varepsilon}(qT)^{\varepsilon}x \ll q^{-1/2}x^{1+10\varepsilon}$$

car $q \leq x^2$, $T \leq x^3$. Cela nous donne le premier terme du membre de droite de (3.4).

3.4 Démonstration du théorème principal

En utilisant le théorème 12 et les lemmes 4 et 6, on a

$$\begin{aligned} S(x,\theta) \ll q^{-1/2}x^{1+10\varepsilon} + \sum_{d|q}(q/d)^{1/2}\frac{1}{\phi(q/d)}\left(1 + x\left|\theta - \frac{r}{q}\right|\right) \\ \left(\max_{1\leq T\leq (x/d)^3} T^{-1}(qT)^{\varepsilon}\int_{1/2}^{1}\left(T\phi(q/d)(x/d)^{\alpha+\varepsilon}\right.\right. \\ \left.\left. + (x/d)^{\sigma+\varepsilon}\sum_{\chi \mod q/d} N(\sigma,T,\chi)\right)d\sigma\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec $q \geq x^{\frac{1}{2(1+\varepsilon)}}$ et $|\theta - r/q| < x^{-(1-\varepsilon)}$.

En scindant l'intervalle d'intégration en deux ($[1/2, 3/4+\varepsilon]$ et $[3/4+\varepsilon, 1]$), on a en utilisant le théorème 3

$$S(x,\theta) \ll x^{25\varepsilon}(Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3),$$

avec

$$Q_0 \ll x^{3/4},$$

$$Q_1 = \max_{d\leq x^{1/2}} \frac{x^{3/4+\delta+\varepsilon}}{d^{1+\delta}},$$

$$Q_2 = \max_{d\leq x^{1/2}} \max_{1\leq T\leq (x/d)^3} \max_{1/2\leq\sigma\leq 3/4+\varepsilon} T^{-1}(x^{1/2}/d)^{-1/2}(x/d)^{\sigma+\varepsilon}(x^{1/2}T/d)^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)},$$

$$Q_3 = \max_{d\leq x^{1/2}} \max_{1\leq T\leq (x/d)^3} \max_{3/4+\varepsilon\leq\sigma\leq 1} T^{-1}(x^{1/2}/d)^{-1/2}(x/d)^{\sigma+\varepsilon}(x^{1/2}T/d)^{(12/5)(1-\sigma)}.$$

Ces quantités sont clairement décroissantes en T et en d. Le maximum est donc atteint pour $d = 1$ et $T = 1$. Ainsi

$$Q_0 \ll x^{3/4},$$

$$Q_1 \ll x^{3/4+10\delta+\varepsilon},$$

$$Q_2 \ll \max_{1/2\leq\sigma\leq 3/4+\varepsilon} x^{\sigma+\varepsilon+\frac{3(1-\sigma)}{2(2-\sigma)}-1/4} \ll x^{4/5+5\varepsilon},$$

$$Q_3 \ll \max_{3/4+\varepsilon\leq\sigma\leq 1} x^{\sigma+\varepsilon+\frac{6(1-\sigma)}{5}-1/4} \ll x^{4/5+5\varepsilon}.$$

En effet, par simple étude de fonction, on voit que $\sigma \mapsto \sigma + \frac{3(1-\sigma)}{2(2-\sigma)}$ et $\sigma \mapsto \sigma + \frac{6(1-\sigma)}{5}$ sont croissantes (resp. décroissantes) sur $[1/2, 3/4+\varepsilon]$ (resp. $[3/4+\varepsilon, 1]$), et donc ont un maximum inférieur à $21/20 + 5\varepsilon$.

D'où le résultat, car ε et δ peuvent être choisis arbitrairement petits.

Chapitre 4

Une autre démonstration

4.1 La méthode de Vaughan

En appliquant la méthode développée par Ram Murty et Sankaranarayanan dans [MS02], qui est essentiellement la méthode de Vaughan, on peut donner une preuve alternative du théorème 1.

Remarque. On peut noter que l'article cité traite de la somme d'exponentielles

$$\sum_{n \leq x} \lambda(n) e(n\theta),$$

où λ est la fonction de Liouville, i.e. la fonction complètement multiplicative définie par $\lambda(p^\alpha) = (-1)^\alpha$ pour les puissances de nombres premiers p^α.

La méthode repose sur l'identité formelle

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= (1 - BG)\frac{A}{B} + AG \\
&= (1 - BG)\left(F + \left(\frac{A}{B} - F\right)\right) + AG \\
&= F - BGF + AG + \left(\frac{A}{B} - F\right)(1 - BG)
\end{aligned}$$

pour $B \neq 0$, identité que l'on souhaite utiliser lorsque F est une approximation de A/B, et G une approximation de $1/B$.

En suivant [MS02] (ou [Dav80], p. 139), on a le lemme suivant.

Lemme 10 *Soit*

$$\begin{aligned}
A(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s},\\
\frac{A(s)}{B(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}, \frac{1}{B(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{b}(n)}{n^s},\\
F(s) &= \sum_{n\le U} \frac{c(n)}{n^s}, G(s) = \sum_{n\le V} \frac{\tilde{b}(n)}{n^s},
\end{aligned}$$

définis pour $\sigma \geq \sigma_0$, U et V étant des paramètres choisis ultérieurement.

Alors on a

$$c(n) = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n) + a_4(n)$$

où

$$\begin{aligned}
a_1(n) &= \begin{cases} c(n) & \text{si} \quad n \le U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\\
a_2(n) &= -\sum_{\substack{der=n\\ e\le V, r\le U}} b(d)\tilde{b}(e)c(r),\\
a_3(n) &= \sum_{\substack{de=n\\ e\le V}} a(d)\tilde{b}(e),\\
a_4(n) &= -\sum_{\substack{de=n\\ d>U, e>1}} c(d) \left(\sum_{\substack{tr=e\\ r\le V}} b(t)\tilde{b}(r) \right).
\end{aligned}$$

Démonstration. Évident par l'identité formelle précédente et par produit de séries de Dirichlet.

En prenant $A(s) = 1$, $B(s) = \zeta(s)$, i.e. $a(n) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon, $b(n) = 1$ pour tout n, $c(n) = \tilde{b}(n) = \mu(n)$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 11 *On a, pour $n \geq 1$,*

$$\mu(n) = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n) + a_4(n)$$

où

$$a_1(n) = \begin{cases} \mu(n) & \text{si} \quad n \leq U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$a_2(n) = -\sum_{\substack{der=n \\ e \leq V, r \leq U}} \mu(e)\mu(r),$$

$$a_3(n) = \begin{cases} \mu(n) & \text{si} \quad n \leq V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$a_4(n) = -\sum_{\substack{de=n \\ d>U, e>V}} \mu(d) \left(\sum_{\substack{tr=e \\ r \leq V}} \mu(r) \right).$$

Démonstration. Le seul point à vérifier est que

$$a_4(n) = -\sum_{\substack{de=n \\ d>U, e>1}} \mu(d) \left(\sum_{\substack{tr=e \\ r \leq V}} \mu(r) \right)$$

est en fait égal à

$$a_4(n) = -\sum_{\substack{de=n \\ d>U, e>V}} \mu(d) \left(\sum_{\substack{tr=e \\ r \leq V}} \mu(r) \right).$$

Cela découle du fait que, pour $1 < e \leq V$,

$$\sum_{\substack{tr=e \\ r \leq V}} \mu(r) = \sum_{tr=e} \mu(r) = 0.$$

4.2 Application à la somme d'exponentielles

Soit

$$S_i(x) = \sum_{n \leq x} a_i(n) e(n\theta)$$

pour $i = 1, ..., 4$.

Lemme 12 *On a*

$$|S_1(x)| \leq U,$$
$$|S_3(x)| \leq V.$$

Démonstration. Évident.

Lemme 13 *Pour tout θ de type 1, on a*

$$|S_2(x)| \leq (UV)^{1+\varepsilon},$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. On a

$$S_2(x) = -\sum_{n\leq x}\left(\sum_{\substack{der=n\\ e\leq V, r\leq U}} \mu(e)\mu(r)\right) e(der\theta)$$
$$= -\sum_{t\leq UV}\sum_{\substack{er=t\\ e\leq V, r\leq U}} \mu(e)\mu(r)\sum_{d\leq x/t} e(dt\theta)$$

Cette dernière somme vaut

$$\left|\sum_{d\leq x/t} e(dt\theta)\right| = \frac{|1-e(x\theta)|}{|1-e(t\theta)|} \leq \frac{1}{|\sin(\pi t\theta)|} \ll \frac{1}{\|t\theta\|}.$$

Par le lemme 7, et comme $d(t) \ll t^{\varepsilon}$ (voir [Ten95] théorème 2 p. 84), on a finalement

$$S_2(x) \ll \sum_{t\leq UV} d(t)\|t\theta\|^{-1} \ll (UV)^{1+\varepsilon},$$

pour tout θ de type 1.

Lemme 14 *Pour tout θ de type 1, on a*

$$S_4(x) \ll x^{1+\varepsilon}(U^{-1/2} + V^{-1/2}),$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. On a

$$S_4(x) = -\sum_{\substack{de=n\leq x\\ d>U, e>V}} \mu(d)f(e,V)e(de\theta),$$

avec

$$|f(e,V)| = \left|\sum_{\substack{tr=e\\ r\leq V}} \mu(r)\right| \leq d(e).$$

Soit

$$J_1 = \sum_{\substack{W<d<2W\\ e>V, de\leq x}} \mu(d)f(e,V)e(de\theta),$$

avec $W \geq U$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|J_1| \leq \left(\sum_{\substack{W<d<2W \\ d \leq x/V}} \mu(d)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{W<d<2W \\ d \leq x/V}} \left| \sum_{\substack{e>V \\ e<x/d, x/W}} f(e,V) e(de\theta) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\ll W^{1/2} \left(\sum_{\substack{W<d<2W \\ d \leq x/V}} \sum_{\substack{V<e_1<x/d,x/W \\ V<e_2<x/d,x/W}} f(e_1,V)\overline{f(e_2,V)} e((e_1-e_2)d\theta) \right)^{1/2}$$

La somme correspondant à $e_1 = e_2$ contribue en une quantité

$$\ll W^{1/2} \left(\sum_{\substack{W<d<2W \\ d \leq x/V}} \sum_{V<e<\min(x/d,x/W)} d(e)^2 \right)^{1/2}.$$

Or $d(n)^2 = \sum_{d|n} f(d)$, où f est une fonction multiplicative telle que $f(p^\alpha) = 2\alpha + 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq z} d(n)^2 &= \sum_{n \leq z} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d \leq z} f(d)[z/d] \\ &\leq z \sum_{d \leq z} f(d)/d \leq z \prod_{p \leq z} (1 + f(p)/p + f(p^2)/p^2 + ...) \\ &\leq z \prod_{d \leq z} (1-1/p)^{-3} \ll z(\log z)^3. \end{aligned}$$

On a

$$|J_1| \ll W^{1/2} \left(\frac{x^2}{VW} \log^3 \frac{x}{W} \right)^{1/2} \ll \frac{x}{V^{1/2}} (\log x)^{3/2}.$$

Pour $e_1 \neq e_2$ et j fixé, l'équation $e_1 - e_2 = j$ détermine une unique solution e_2 pour tout e_1 fixé. Donc la somme correspondant à $e_1 \neq e_2$ contribue en une quantité

$$\ll W^{1/2} x^\varepsilon \left(\sum_{j \leq x/W} \frac{j}{\|j\theta\|} \right)^{1/2},$$

qui est par le lemme 7 borné par

$$\frac{x^{1+2\varepsilon}}{W^{1/2}}$$

pour tout θ de type 1.

Ainsi

$$|J_1| \ll \frac{x}{V^{1/2}}(\log x)^{3/2} + \frac{x^{1+2\varepsilon}}{W^{1/2}}.$$

Nous prenons $W = 2^t U$, avec $t = 0, 1, .., [\log(x/UV)/\log 2]$; nous sommons donc sur $\mathcal{O}(\log x)$ intervalles, d'où le résultat.

Nous pouvons ainsi (re)démontrer le théorème 1.

Démonstration. Les lemmes précédents nous donnent

$$S(x, \theta) \ll U + (UV)^{1+\varepsilon} + V + x^{1+\varepsilon}(U^{-1/2} + V^{-1/2}),$$

pour tout θ de type 1. Nous choisissons $U = V = x^{2/5}$ pour obtenir l'estimation attendue en $x^{4/5+\varepsilon}$.

Remarque. On obtient bien le même résultat qu'avec la méthode décrite au §3.4. Toutefois, la méthode de [MS05] laisse espérer une amélioration de l'exposant $4/5 + \varepsilon$: on pourrait par exemple le remplacer par $3/4 + \varepsilon$ sous réserve d'avoir une amélioration au niveau du théorème 3, où la constante $12/5$ serait remplacée par 2.

Bibliographie

[BH91] R.C. Baker et G. Harman. Exponential sums formed with the Möbius function. *J. London Math. Soc.*, 43 :193–198, 1991.

[Dav37] H. Davenport. On some infinite series involving arithmetical functions - II . *Quart. J. Math.*, 8 :313–320, 1937.

[Dav80] H. Davenport. *Multiplicative number theory.* Springer-Verlag, 1980.

[Erd48] P. Erdös. Some remarks on diophantine approximations. *J. Indian Math. Soc.*, 12 :67–74, 1948.

[HW38] G. H. Hardy et E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, 1938.

[KN74] L. Kuipers et H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley, 1974.

[Mon71] H. L. Montgomery. *Topics in multiplicative number theory.* Springer-Verlag, 1971.

[MS02] M. Ram Murty et A. Sankaranarayanan. Averages of exponential twists of the Liouville function. *Forum Math.*, 14 :273–291, 2002.

[MS05] H. Maier et A. Sankaranarayanan. On an exponential sum involving the Möbius function. *Hardy Ramanujan J.*, 28 :10–29, 2005.

[RS91] K. Ramachandra et A. Sankaranarayanan. On some theorems of Littlewood and Selberg - III. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 16 :139–149, 1991.

[Ten95] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Cours spécialisés. SMF, 1995.